V-53 (10 min) 16-junio-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Acción de Hilbert-Einstein (2)** **Deducción fórmula de símbolos de Christoffel contraídos**

En el video 13, tras explicar que el vector tangente a una geodésica se transporta paralelamente, se obtiene una ecuación alternativa para las geodésicas en las que aparecen los símbolos de Christoffel. Comparando con la ecuación de las geodésicas del video 8, se establece la conexión métrica, o relación entre la métrica de la variedad y los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{kp}^{m} = \frac{1}{2} g^{mi}\left[\partial_k g_{ip} + \partial_p g_{ik} - \partial_i g_{kp}\right]$$

Para hallar el Christoffel contraído, lo hacemos con los índices *m* y *k*, llamando ambos $\boldsymbol{m = k \equiv \mu}$
También $\boldsymbol{p}$ y el índice mudo interno $\boldsymbol{i}$, los renombramos con letras griegas: $\boldsymbol{p \equiv \nu}$; $\boldsymbol{i \equiv \beta}$:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\beta}\left[\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}\right] = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu}) + g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu}) - g^{\mu\beta}(\partial_\beta g_{\mu\nu})\right]$$

En el interior del corchete, salvo $\boldsymbol{\nu}$ que es un índice libre, los otros son mudos ligados por el criterio de sumatorio de Einstein. Por ejemplo el primer término del corchete es equivalente intercambiando el índice ***$\boldsymbol{\mu}$ con $\boldsymbol{\beta}$:***
$g^{\mu\beta}\partial_\mu g_{\beta\nu} = g^{\beta\mu}\partial_\beta g_{\mu\nu}$. Puesto que los valores de *g* son simétricos ($g^{\beta\mu} = g^{\mu\beta}$) es fácil ver que el primer término se anula con el tercer término. Queda:

$$\boldsymbol{\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2}\, g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu})} \quad \textbf{(I)}$$

Retomamos (III) del video 52: $\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta}$ y renombramos $\boldsymbol{\alpha}$ por $\boldsymbol{\mu}$**:** $\boldsymbol{\delta\sqrt{-g} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\beta}\delta g_{\mu\beta}}$

Para relacionar ambas expresiones tiene que aparecer la derivada $\boldsymbol{\partial_\nu g_{\beta\mu} = \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu}}$ **.** Para ello, en la expresión (III) dividimos los dos miembros por la variación infinitesimal δx^ν

$\frac{\delta\sqrt{-g}}{\delta x^\nu} = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\beta}\frac{\delta g_{\mu\beta}}{\delta x^\nu}$ En el límite los cocientes son derivadas parciales: $\left(\partial_\nu\sqrt{-g}\right) = \frac{\sqrt{-g}}{2}\, g^{\mu\beta}\left(\partial_\nu g_{\mu\beta}\right)$

$$\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\nu\sqrt{-g}\right) = \frac{1}{2}\, g^{\mu\beta}(\partial_\nu g_{\beta\mu})}$$

Comparando con la expresión **(I)** nos queda la ´fórmula que buscábamos para la contracción del símbolo de Christoffel en función del determinante de la métrica ***g*** y de su derivada:

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\partial_\nu\sqrt{-g}\right)}} \quad \textbf{(II)}$$